CHAPITRE 19 - 3 : COMPLEMENT
Le calcul matriciel - Bases et notations.

Ce complément théorique a pour but de rappeler au lecteur les bases du calcul matriciel, qui sont utilisées dans les précédentes parties du chapitre 19, et aux chapitres 22 et 23, et de le familiariser avec les notations adoptées pour présenter ces calculs.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

1 NOTIONS DE BASE : GROUPE - ANNEAU - CORPS

1.1 Groupe Abélien ou commutatif

Un groupe Abélien est un ensemble possédant une loi de composition interne « T »

- commutative : aTb = bTa
- associative : (aTb)Tc = aT(bTc)
- possédant un élément neutre : aTe = eTa = a
- possédant un élément symétrique : ūTu = uTū = e

Par exemple, l'ensemble des nombres réels ou complexes forme un groupe abélien par rapport à l'addition :

- T = +
- ū = - u
- e = 0

1.2 Anneau

Un groupe abélien pour la loi « T » est un anneau, s'il admet une seconde loi de composition interne « P » :

- associative : (aPb)Pc = aP(bPc)
- distributive à droite et à gauche par rapport à T
  - (aTb)Pc = (aPc)T(bPc)
  - aP(bTc) = (aPb)T(aPc)

En outre l'anneau est commutatif si :

- aPb = bPa

1.3 Corps

Si on peut toujours trouver un élément « s » tel que, pour « a » et « b » donnés :

- aPs = b

en particulier s'il existe un élément neutre « n » tel que :

- aPn = a

et un élément symétrique « q^{-1} » tel que :

- $qPq^{-1} = n$

l'ensemble possédant les deux lois de composition « T » et « P » forme un corps.

Par exemple, les nombres réels ou complexes, avec T = addition et P = multiplication, forment un corps commutatif.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

2 ESPACE VECTORIEL

2.1 Définition

Toute combinaison linéaire de vecteurs (notés **:** $X_{i)}$ est un vecteur :

- $X = \Sigma c_i X_i$

« k » vecteurs sont considérés comme **linéairement indépendants si :**

- $\Sigma c_i X_i = 0$, si et seulement si tous les c_i sont nuls pour : $1 \leq i \leq k$

Soient :

- un **groupe abélien « E »** d'éléments $X_1 \dots X_n$ (vecteurs),
- un **corps commutatif « C »** d'éléments $c_1 \dots c_n$ (nombres complexes).

« E » forme un ESPACE VECTORIEL s'il existe une loi **de composition externe** telle que :

- $c X$ appartient à **E**
- $c_1 (c_2 X) = (c_1 c_2) X$
- $1 X = X$
- $0 X = 0$
- $c (X_1 + X_2) = c X_1 + c X_2$
- $(c_1 + c_2) X = c_1 X + c_2 X$

Un espace vectoriel **E** est d'ordre « n » si on peut trouver une combinaison linéaire de « n » vecteurs « V_i » telle que :

- $\Sigma c_i V_i = 0$, si et seulement si tous les c_i sont nuls pour : $1 \leq i \leq n$;
- cette propriété n'est plus vérifiée pour $n + 1$ vecteurs.

L'ensemble des « V_i » constitue une base (notée V) dans l'espace vectoriel **E**

Tout vecteur « X_j » de l'espace vectoriel **E** est une combinaison linéaire des vecteurs « V_i » :

$$\boxed{X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} V_i}$$

Les nombres complexes x_{ij} sont les composantes du vecteur X_j

2.2 Produit scalaire

a Définition

Soient deux vecteurs X et Y, leur produit scalaire s'écrit :

$$\langle X.Y \rangle = \sum_k x_k . y_k^*$$

Ce produit n'est pas commutatif, il est associatif :

$$\langle X, Y + Z \rangle = \langle X.Y \rangle + \langle X.Z \rangle$$
$$\langle aX, Y \rangle = \langle X, aY \rangle$$

b Orthogonalité de vecteurs

X et Y sont orthogonaux si :

$$\langle X.Y \rangle = \sum_k x_k . y_k^* = 0$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

c Norme d'un vecteur

$$\langle X.X\rangle = |X|^2 = \sum_k x_k.x_k^* = \sum_k |x_k|^2$$

2.3 Espace vectoriel orthonormé

Un espace vectoriel **E** vecteurs « V_i » est orthonormé si :

$$\langle V_i V_j\rangle = \delta_{ij}$$
$$\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$$
$$\delta_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq j$$

3 LES MATRICES

3.1 Changement de base

a Principe

Supposons l'existence d'une seconde base dans l'espace **E** : $V'_1 \ldots V'_n$.

Chaque vecteur V'_j s'écrit en fonction des V_i :

$$V'_j = \sum_i a_{ij} V_i$$

Tout vecteur X peut alors s'écrire :

$$X = \sum_i x_i V_i = \sum_j x'_j V'_j = \sum\sum x'_j a_{ij} V_i$$

Il en résulte que :

$$\boxed{x_i = \sum_j a_{ij} x'_j}$$

Ceci à la condition que le déterminant $\Delta(a_{ij})$ ne soit pas nul.

b Représentation matricielle

Une manière d'écrire l'expression des x_i est de définir le vecteur X de composantes x_i et la matrice A des « a_{ij} » :

$$A = \begin{array}{c|c} & j \rightarrow \\ \hline i \downarrow & \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{Vmatrix} \end{array}$$

et de poser

X = AX'

$$\begin{array}{c} i \\ \downarrow \end{array} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{array}{c} i \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} j \rightarrow \\ \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{Vmatrix} \end{array} \cdot \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_j \\ x'_n \end{Vmatrix} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array}$$

x_i = Somme des produits ligne « i »de B par colonne « x' »

Cette représentation peut être adoptée pour tout type d'application dans un espace vectoriel.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

c Retour au changement de base

Dans la base V les coordonnées d’un vecteur de la base V_i sont toutes nulles sauf $x_i = 1$. On peut donc écrire :

$$AV_i = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ x'_i = 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1i} \\ a_{ii} \\ a_{ni} \end{vmatrix} = V'_i$$

Soit :

$$V'_i = AV_i$$

3.2 Produit de deux matrices

a Définition

Soient trois vecteurs :

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_k X_k V_k \\ Y &= \sum_j y_j V_j \\ Z &= \sum_i z_i V_i \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Y = AX &\Rightarrow A = (a_{jk}) \\ Z = BY &\Rightarrow B = (b_{i.j}) \\ Z = CX &\Rightarrow C = (c_{ik}) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$Z = BAX$$

Ce qui s’exprime par :

$$Y_j = \sum_k a_{jk} x_k$$

$$z_i = \sum_j b_{ij} y_j = \sum_k c_{ik} x_k$$

$$\sum_k c_{ik} x_k = \sum_j b_{ij} \sum_k a_{jk} x_k = \sum_k (\sum_j b_{ij} a_j jk) x_k$$

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$$

La matrice $C = BA$ a donc pour terme général :

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$$

$$\begin{array}{cc} & k \\ i & \begin{Vmatrix} * & * & * \\ * & c_{ik} & * \\ * & * & * \end{Vmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{Vmatrix} * & * & * \\ .b_{i1} & b_{ij} & b_{in} \\ * & * & * \end{Vmatrix} \end{array} . \begin{array}{cc} & k \\ j & \begin{Vmatrix} * & a_{1k} & * \\ * & a_{jk} & * \\ * & a_{nk} & * \end{Vmatrix} \end{array}$$

C_{ik} = Somme des produits ligne « i »de B par colonne « k »de A

ISBN : 978-2-9544675-1-1

b Propriétés

Le produit de matrices :

- n'est pas commutatif ;
- est associatif et distributif
- deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul
- puissances de matrices exemple cube : $A^3 = AAA$
- $A^0 = I$ avec : I matrice unitaire ; $a_{ii} = 1$; $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

3.3 Matrices types : Notations

Vecteur : X= matrice à une colonne

Vecteur transposé : X^T = matrice ligne des composantes de X

Vecteur transposé conjugué : X^H= matrice ligne des valeurs conjuguées des composantes de X

Matrice transposée : $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji})$

Matrice conjuguée : $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^* = (a^*_{ij})$

Matrice associée ou transposée conjuguée : $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^{T*} = A^H = (a^*_{ji})$

Matrice diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Matrice symétrique : $a_{ij} = a_{ji}$

Matrice hermitique : $a_{ij} = a^*_{ji}$

3.4 Déterminants

a Déterminant de deuxième ordre

$$\Delta = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

b Déterminant de troisième ordre

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

On définit le cofacteur : $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$ et on démontre que :

$$\Delta = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$$

$$\Delta = a_{11}.\Delta_{11} - a_{12}.\Delta_{12} + a_{13}.\Delta_{13}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

c Propriétés

Le déterminant du produit de deux matrice est le produit de leurs déterminant.

La multiplication par K concerne une seule ligne ou colonne.

Si deux lignes ou colonnes sont proportionnelles le déterminant est nul.

Si on intervertit les lignes et colonnes (transposition), le déterminant change de signe.

3.5 Matrice inverse

a Définition

Soient deux vecteurs X et Y liés à travers la matrice A par la relation :

$$Y = AX \Leftrightarrow y_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

On recherche la matrice inverse A^{-1} permettant de repasser de Y à X

$$X = A^{-1}Y \Leftrightarrow x_i = \sum_j \alpha_{ij} y_j$$

On démonte (formule de Cramer) que :

$$\alpha_{ij} = \frac{C_{ji}}{\Delta}$$

relation où :

- Δ est le déterminant de la matrice A
- C_{ij} est un cofacteur (Cf. & 3.4.2)

b Propriétés

$$A.A^{-1} = A^{-1}A$$

$$AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4 ESPACE HERMITIQUE – ESPACE DE HILBERT

4.1 Formes linéaires

Soit un vecteur « X » de l'ensemble vectoriel **E** et un nombre complexe « z(X) » tel que :

- $z(X_1 + X_2) = z(X_1) + z(X_2)$,
- $z(mX) = mZ(X) \rightarrow$(m : nombre complexe).

z(X) est une forme linéaire dans l'ensemble vectoriel **E**.

4.2 Formes bilinéaires

On peut de la même manière associer à tout couple (X_1,X_2) un nombre complexe $\Psi(X_1,X_2)$ qui pour X_1 fixé est linéaire en X_2 et inversement :

Dans le cas particulier où $X_1 = X_2$, $\Psi(X,X)$ est une forme quadratique.

Les formes linéaires et bilinéaires sont parfaitement définies si on connaît leurs valeurs sur tous les vecteurs d'une base de **E** car on peut écrire :

- $z(X) = \sum x_i\, z(V_i)$
- $y(X,Y) = \sum x_i\, y_J\, \Psi(V_i, V_j)$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

4.3 Retour sur le produit scalaire

a Définition

On appelle **produit scalaire** une **forme linéaire en X :** $<X,Y>$, vérifiant les relations :

- $<(X_1 + X_2),Y> = <X_1,Y>+<X_2,Y>$
- $<mX,Y> = m<X,Y>$

et possédant les propriétés suivantes :

- $<Y,X>= <X,Y>^*$
- $<X,X>$ est un nombre réel positif.

De ces expressions on déduit :

- $<X,mY> = m^*<X,Y>$

ce qui montre que le **produit scalaire** $<X,Y>$ est une **forme bilinéaire** sur X et Y*. Le produit scalaire défini au paragraphe 2.2 entre deux vecteurs X et Y :

$$\langle X.Y \rangle = \sum_k x_k . y_k^*$$

répond bien à cette définition

Par ailleurs, si on considère une **base quelconque** formée des vecteurs V_i telle que :

$$\boxed{<V_i,V_j> = g_{ij}}$$

l'expression du produit scalaire dans cette base est :

$$\boxed{\langle X,Y \rangle = \sum_i \sum_j g_{ij} x_i y_j^*}$$

On notera que $g_{ji} = g^*_{ij}$, car :$<V_j,V_i> = <V_i,V_j>^*$.

La matrice $G[g_{ji}]$ qui possède cette propriété est dite **hermitique**.

b Orthogonalité

Des vecteurs sont dits **orthogonaux si :** $<XY>=0$

c Longueur d'un vecteur

On peut associer à tout vecteur X un réel L(X) tel que:

- $L(X) \geq 0$
- $L(mX) = mL(X)$
- $L(X + Y) \leq L(X) + L(Y)$

Parmi les entités possibles on retiendra :

$$L(X) = \langle X,X \rangle^{1/2}$$

4.4 Espace de Hilbert

Un **espace vectoriel** dans lequel on a défini un **produit scalaire** (X,X) et une **longueur** L(X) telle que :

$$\boxed{L(X) = \langle X,X \rangle^{1/2}}$$

est un **espace de Hilbert.**

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Un espace de Hilbert à **nombre fini de dimensions** est **un espace hermitique.**

La **norme du vecteur X dans une base quelconque** s'écrit :

$$|X|^2 = \langle X, X \rangle$$

$$|X|^2 = [L(X)]^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} x_i x_i^*$$

Dans un tel espace existe **l'inégalité de Schwartz :**

$$\boxed{|\langle XY \rangle|^2 \leq \langle XX \rangle . \langle YY \rangle}$$

4.5 Base orthonormale

a Base de vecteurs orthogonaux

Si « n » **vecteurs** non nuls sont **deux à deux orthogonaux**, ils sont linéairement indépendants et **constituent une base**.

Considérons la relation :

$$m_1 V_1 + \cdots + m_i V_i + \cdots + m_n V_n = 0$$

si on multiplie les deux membres par V_i, cela entraîne,:

$$m_i(V_i, V_i) = 0 \rightarrow m_i = 0$$

quel que soit « i », car : $(V_i, V_j) = 0$ si : $i \neq j$ et : $(V_i, V_i) = L(V_i) \neq 0$.

On retrouve bien ici les conditions pour que les vecteurs « V » forment une base.

Dans une telle base un produit scalaire s'écrit :

$$\boxed{\langle XY \rangle = \sum_i g_{ii} x_i y_i^*}$$

On notera en particulier :

$$\langle XV_i \rangle = g_{ii} x_i$$
$$\langle V_i, V_i \rangle = g_{ii}$$

b Longueur des vecteurs de la base

A partir d'une base de vecteurs orthogonaux on peut définir diverses bases, se distinguant par la longueur ou la norme des vecteurs de la base.

Vecteurs de même longueur :

$$g_{ii} = L^2$$

Vecteur de longueur ou norme unitaire :

$$g_{ii} = 1$$

c Base orthonormale

On appelle base orthonormale toute base telle que :

$$\langle V_i, V_j \rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j$$
$$\langle V_i, V_i \rangle = 1$$

Dans une base orthonormale :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\langle XY \rangle = \sum_i x_i y_i^*$$
$$\langle X, V_i \rangle = x_i$$
$$X = \sum_i x_i V_i$$

et si on écrit les vecteurs sous forme matricielle :

$$\langle XY \rangle = Y^H X$$

H étant ici l'opérateur « transposé – conjugué » (symétrie hermitique).

$$\langle XY \rangle = \begin{vmatrix} y_1^* & y_i^* & y_n^* \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{vmatrix}$$

4.6 Valeurs propres et vecteurs propres attachés à un opérateur linéaire

a Définition

Soit « A » un opérateur linéaire défini sur l'espace **E**. Considérons les vecteurs « X », parallèles à leur transformées par A. Ils répondent à la relation :

$$AX = \lambda X$$

Expression où « λ » est un nombre réel ou complexe. Les λ_i répondant à cette définition sont les **valeurs propres** attachées à l'opérateur linéaire A.

b Equation caractéristique

En considérant la matrice unitaire « I » : telle que : $X = I.X$, soit : $\lambda X = \lambda\ I.X$,

on peut écrire : $AX = \lambda\ I.X$, ce qui entraine :

$$||\lambda I\text{-}A||.X = 0$$

$||\lambda I\text{-}A||$ est dite matrice caractéristique.

c Valeurs propres

Comme tous les termes de la matrice caractéristique ne sont pas nuls, il faut pour répondre à l'équation précédente qu'il y ait au moins une relation linéaire entre eux. Il en résulte que le déterminant de la matrice caractéristique est nul.

Ce déterminant est un polynôme « $g(\lambda)$ »de degrés « n » en « λ ». Il peut se mettre sous la forme :

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).....(\lambda - \lambda_n)$$

Les « λ_k », racines de l'équation « $g(\lambda) = 0$ » sont les **valeurs propres** attachées à l'opérateur linéaire A

d Vecteurs propres

A chaque valeur propre correspond un vecteur tel que :

$$||\lambda_{k.}I\text{-}A||.X_k = 0$$

Les **vecteurs propres** : X_k, sont définis à un coefficient près puisque :

$$A(mX) = mA(X)$$

Ils définissent en fait des **directions propres**.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

e Propriétés

1. Une matrice régulière possède n valeurs propres.
2. $\lambda_{1.}\ \lambda_{2.}\ \lambda_{3.}....\ \lambda_n$ = déterminant de A.
3. $\lambda_{1+}\ \lambda_{2+}\lambda_{3+}...\ \lambda_n$ = trace de A.
4. Tous les vecteurs propres d'une matrice sont linéairement indépendants.

5 OPERATEURS HERMITIQUES

5.1 Opérateur hermitique

On appelle opérateur hermitique tout opérateur linéaire A tel que pour tous vecteurs X et Y :

$$<AX,Y> = <X,AY>.$$

Les **valeurs propres** d'un opérateur hermitique sont **réelles**.

Les **vecteurs propres** d'un opérateur hermitique sont **orthogonaux**.

Dans un espace hermitique (nombre fini de dimensions) **orthonormé :**

$$\langle XAY \rangle = (AY)^H X = Y^H A^H X$$

$$\langle AX, Y \rangle = Y^H AX$$

donc

$$\boxed{A^H = A}$$

L'opérateur « A » est une matrice hermitique.

Du fait de cette propriété, la matrice A, après changement de coordonnées orthonormées, peut devenir une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les « λ_k », chaque valeur propre multiple étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et associée de ce fait à autant de vecteurs propres orthogonaux.

5.2 Propriétés des valeurs et vecteurs propres en espace hermitique

Par définition, toute valeur propre « λ », liée à un vecteur propre « X » répond à la relation :

$$AX = \lambda X$$

D'après la définition de l'opérateur hermitique on peut écrire:

$$\langle AX.X \rangle = \langle X.AY \rangle \iff \langle \lambda X.X \rangle = \langle X.\lambda X \rangle \iff \lambda \langle X.X \rangle = \lambda^* \langle X.X \rangle$$

donc

$$\boxed{\lambda = \lambda^*}$$

Les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles. Considérons maintenant X_1 et X_2, deux vecteurs propres distincts. On a:

$$\langle AX_1.X_2 \rangle = \langle X_1.AX_2 \rangle \iff \langle \lambda_1 X_1.X_2 \rangle = \langle X_1.\lambda_2 X_2 \rangle \iff \lambda_1 \langle X_1, X_2 \rangle = \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle$$

car « λ » est réel, et ceci pour λ_1 # λ_2 par hypothèse. Donc **X_1 et X_2 sont orthogonaux**.

On démontre en outre que $(X_1,X_2) = 0$ reste une solution pour les valeurs multiples de X et qu'il peut exister autant de vecteurs orthogonaux associés à chaque « λ » que son ordre de multiplicité.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

5.3 Application au problème de la détection

Considérons un espace de Hilbert de fonctions « $X(t)$ » de durée « T », définies entre les instants « t_0 et $t_0 + T$ ».

Leur **produit scalaire** est défini par :

$$\langle X, Y\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} X(t) \cdot Y^*(t) \cdot dt$$

Dans cet espace considérons une application linéaire « A » définie par :

$$AX(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot X(u) \cdot du$$

expression où « $\rho(\tau)$ » est une fonction d'autocorrélation donc réelle et symétrique.

On peut écrire :

$$AX(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot X(u) \cdot du$$
$$\langle AX, Y\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T}\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot X(u) \cdot Y^*(t) \cdot du \cdot dt$$
$$\langle X, AY\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T}\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot X(t) \cdot Y^*(u) \cdot du \cdot dt$$
$$\langle X, AY\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T}\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(t-u) \cdot X(u) \cdot Y^*(t) \cdot du \cdot dt$$

Mais $\rho(t-u) = \rho(u-t)$ donc :

$$\boxed{(AX, Y) = (X, AY)}$$

L'opérateur « A » **est un opérateur hermitique.**

On peut donc en déduire que **l'ensemble des vecteurs** « $V(t)$ » répondant à la relation

$$AV_i(t) = \lambda_i . V_i(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot V(u) \cdot du$$

forment une base orthogonale dans l'espace considéré, et que **tous les** « λ_i » **sont réels**.

Ceci constitue le point de départ du paragraphe 6 « RECEPTION OPTIMALE EN BRUIT COLORE » du chapitre 23.

****

ISBN : 978-2-9544675-1-1